

基于线性二次型算法的轮式移动机器人 轨迹跟踪控制

廖玉彬^{1,2} 欧勇盛¹

¹(中国科学院深圳先进技术研究院 深圳 518055)

²(中国科学院大学深圳先进技术学院 深圳 518055)

摘 要 文章在控制输入饱和约束条件下, 以非完整移动机器人的运动学模型为对象, 研究了移动机器人的轨迹跟踪问题。首先在参考轨迹处对运动学模型进行线性化得到移动机器人线性时变系统, 证明了其能观性和能控性, 在此基础上设计了饱和约束条件的分段线性二次型控制器 (Piecewise Linear Quadratic Regulator, PLQR), 并基于 Lyapunov 方法证明了其稳定性。在 MATLAB 软件平台下的仿真和实验结果表明, 基于 PLQR 的轮式移动机器人对不同初始位姿及不同的参考轨迹都有较好的跟踪效果, 且能够避免控制律跳变现象, 满足饱和约束条件。

关键词 移动机器人; 轨迹跟踪; 饱和约束; 线性二次型调节器

中图分类号 TP 249 **文献标志码** A

Trajectory Tracking Control of a Piecewise Linear Quadratic Regulator for Wheeled Mobile Robots under Saturation Constraints

LIAO Yubin^{1,2} OU Yongsheng¹

¹(Shenzhen Institutes of Advanced Technology, Chinese Academy of Sciences, Shenzhen 518055, China)

²(Shenzhen College of Advanced Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Shenzhen 518055, China)

Abstract In this paper, a framework which applies the piecewise linear quadratic regulator (PLQR) control based on linear time-varying system was presented to solve the problem of input saturations in the tracking control of wheeled mobile robot (WMR). Based on the Lyapunov method, it is proved that the designed trajectory tracking controller PLQR can satisfy the input saturation condition, and guarantee the stability of closed-loop system. With the Matlab simulation experiments, the results show that the PLQR based wheeled mobile robot has good tracking performance with different initial positions and various reference trajectories.

Keywords mobile robot; trajectory tracking; input saturations; linear quadratic regulator

收稿日期: 2017-01-11 修回日期: 2017-03-16

基金项目: 国家高技术研究发展计划 863 项目 (2015AA042303); 国家自然科学基金资助 (U1613210); 深圳市海外创新创业研究计划 (KQCX2015033117354155); 深圳市基础研究计划 (JCYJ20140718102705295、JCYJ2016428154842603)

作者简介: 廖玉彬, 硕士研究生, 研究方向为机器人控制; 欧勇盛 (通讯作者), 研究员, 研究方向为智能机器人、智能控制和机器学习, E-mail: ys.ou@siat.ac.cn.

1 引言

近年来, 轮式移动机器人已在多个领域发挥着重要的作用, 成为热门的研究对象。轮式移动机器人在非结构环境中工作时, 工作范围大, 存在很多未知因素的干扰, 因此, 需要解决环境建模、定位与导航、任务规划、路径与运动规划、人机交互、运动控制等一系列的问题。其中, 移动机器人所有的任务都是通过运动控制来实现, 故运动控制是这些问题中最基本的问题。轮式移动机器人的轨迹跟踪控制是以在工作环境中实时定位信息作为反馈, 以运动规划得到的参考轨迹或目标点作为前馈, 寻求有界的控制输入, 使得非完整轮式移动机器人在有限时间内从任意初始位姿到达目标位姿。由于轮式移动机器人一般假设车轮只发生纯滚动而不发生侧滑和纵向打滑, 受到非完整约束。但非完整约束不能通过积分转化为几何约束, 是不可积的约束, 从而不能将原来的系统简化为低维无约束的系统, 不满足 Brockett^[1]光滑状态反馈镇定必要条件, 不存在光滑静态或者动态反馈镇定控制律。同时, 非完整移动机器人还是欠驱动非线性系统, 其在实际应用中受饱和约束条件, 对其控制提出更大的挑战。

为了精准地跟踪轨迹, 学者们对不同控制方法进行了大量的研究。其中主要有最优控制方法^[2-4]、鲁棒性控制方法^[5]、自适应控制方法^[6-8]、反演控制方法^[9-10]、神经网络控制方法^[11-12]和变结构控制方法^[13]等。而在移动机器人的实际应用中, 由于受到驱动器输出饱和的限制, 控制系统的实际输入是有界的, 但很多文献在设计轨迹跟踪控制器时没有考虑控制输入饱和的约束条件, 容易导致控制性能严重退化甚至闭环系统失去稳定性。在考虑饱和约束条件下, Huang 等^[14]和 Shojaei^[15]基于 Lyapunov 函数设计了满足饱和约束条件的轨迹跟踪控制器, 其要求期望线速度

必须大于零, 具有一定限制。

最优控制理论是现代控制理论的重要组成部分, 它通过建立描述受控运动过程的运动方程, 给出控制变量的允许取值范围, 指定运动过程的初始状态和目标状态, 并且规定一个评价运动过程品质优劣的性能指标^[16,17]。最优控制理论能够解决带约束条件的系统。Lian 等^[18]提出了一种基于滚动时域双启发规划的近似最优的轮式移动机器人轨迹跟踪控制器, 这种控制器包括采用反演运动控制器生成所需的控制律和利用滚动时域策略将无限时域最优控制问题分解为一系列有限时域最优控制问题, 最终通过 Lyapunov 方法证明了所设计的控制器的渐近稳定性。Sunberg 等^[19]和 Rawlings 等^[20]针对具有约束和不确定性的多变量系统采用模型预测控制求解最优控制问题。最优控制理论的线性二次型控制器 (Linear Quadratic Regulator, LQR) 是一种标准的线性控制器, 考虑了性能指标下设计的最优控制器, 具有工程上易于实现、使用方便的特点。为此, 我们采用 LQR 来解决上述问题。但 LQR 在设计过程中, 要求控制输入无约束。而实践中的移动机器人由于受驱动器的限制, 存在控制输出受限的问题。因此, 带饱和约束条件的移动机器人无法直接用 LQR 方法设计控制律。鉴于此, 我们通过将传统 LQR 结合饱和约束, 选取了一种含饱和约束的分段二次型控制律 (Piecewise Linear Quadratic Regulator, PLQR) 并对选取的控制器进行稳定性证明。

文章后续组织如下: 第 2 节, 阐述了对两个驱动轮、一个万向轮 (2, 0) 型移动机器人系统进行线性时变系统建模, 并对所建的模型进行能控性和能观性分析; 第 3 节, 在线性时变系统基础上, 设计了分段二次型最优控制器; 在第 4 节中, 我们在 MATLAB 软件平台上进行数值仿真, 验证了控制器的有效性; 第 5 节得出结论。

2 系统建模与分析

本文的研究对象为双轮差分驱动方式的(2, 0)型轮式移动机器人,如图1所示。该机器人带有3个接触点,装有两个居中的标准驱动轮A和B及一个只起支撑作用的万向前轮D,点C为机器人和轮轴AB的中心。首先针对本文的研究对象,假设两个驱动轮A和B具有相同半径,并且每个轮子总是垂直于理想的水平面运动,每个轮子只有单个点和水平面接触,各轮与地面的摩擦系数相同,轮子不容许在地面打滑。

为了表示(2, 0)型轮式移动机器人在工作环境中的位置和姿态,我们分别建立了如图1所示的全局坐标系 xOy 和机器人局部参考坐标系 x_cCy_c 。首先建立全局坐标系 xOy :在工作环境的二维平面中任选一点 O 为原点,过原点 O 选择一条直线为全局坐标系 xOy 的 x 轴,并指定一个方向为正方向,过原点并垂直于该 x 轴作一条直线为全局坐标系的 y 轴,并由 x 轴的逆时针 90° 方向为 y 轴的正方向。然后选取两驱动轮的轮轴AB的中心点 C 为原点,过点 C 作垂直于AB为 x_c 轴,指向万向轮 CD 方向为 x_c 轴的正方向,两

驱动轮的轮轴为 y_c 轴,由右手法则指定 y_c 的正方向,由此建立局部坐标系 x_cCy_c 。因此,(2, 0)型轮式移动机器人的位置可以通过机器人的中心 C 在全局坐标系 xOy 中的坐标 (x, y) 来确定。其中, x 为中心 C 在 x 轴上映射, y 为中心 C 在 y 轴的映射。(2, 0)型轮式移动机器人在环境中的角度用局部坐标系 x_cCy_c 的 x_c 轴与全局坐标系 xOy 的 x 轴之间的夹角 θ 表示。当 x 轴逆时针旋转 θ 至 x_c 轴为正,反之为负方向。因此,由位置 (x, y) 和姿态 θ 组成的位姿向量 $\mathbf{X}=[x \ y \ \theta]^T$ 表示(2, 0)型轮式移动机器人的位姿。

根据文中的假设,两驱动轮A和B的轴向AB无滑动条件,在(2, 0)型轮式移动机器人运动过程中, \dot{x} 为机器人在全局坐标系 xOy 中 x 轴方向的速度, \dot{y} 为机器人在全局坐标系 xOy 中 y 轴方向上的速度,分别将 \dot{x} 和 \dot{y} 映射到局部坐标系 x_cCy_c 中的 y_c 方向上,则满足如下约束关系:

$$\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

公式(1)便是移动机器人收到的非完整约束方程,其物理意义是机器人运动时的瞬时速度方向始终与驱动轮轴垂直且无侧向移动速度,可以写出Pfaffian约束形式:

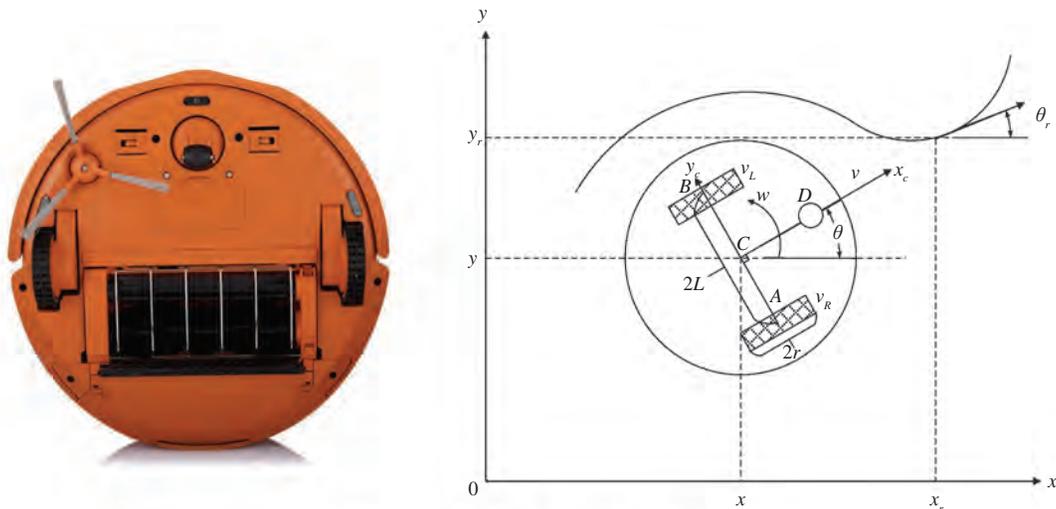


图1 (2, 0)型轮式移动机器人

Fig. 1 (2, 0)-type wheeled mobile robot

$$A(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

其中, $A(\mathbf{X}) = [-\sin \theta \ \cos \theta \ 0]$ 。那么可以选择一个满秩矩阵 $S(\mathbf{X}) = [S_1(\mathbf{X}), S_2(\mathbf{X})]$, $S(\mathbf{X}) \in \mathbf{R}^{3 \times 2}$ 。

其中 $S_i(\mathbf{X}) (i=1, 2)$ 为 $A(\mathbf{X})$ 的零空间的一组基, 使得

$$A(\mathbf{X}) \cdot S(\mathbf{X}) = 0 \quad (3)$$

由 $\begin{cases} A(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}} = 0 \\ A(\mathbf{X}) \cdot S(\mathbf{X}) = 0 \end{cases}$ 可知, 存在 2 维的速度向量

$\mathbf{u}(t) = [v, \omega]^T$ 使得

$$\dot{\mathbf{X}} = S(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{u}(t) \quad (4)$$

选取 $S(\mathbf{X})$ 和控制输入向量 $\mathbf{u}(t)$:

$$S(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (5)$$

则非完整移动机器人的运动学方程^[21]为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= S(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ \omega \end{bmatrix} = f(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $\mathbf{X} = [x \ y \ \theta]^T$ 为机器人的实际位姿; $\mathbf{u} = [v \ \omega]^T$ 为控制率, 由线速度 v 和角速度 ω 组成; v 为移动机器人的线速度, 向前为正, 向后为负; ω 为移动机器人的角速度, 逆时针方向为正, 顺时针方向为负。

2.1 线性时变系统建模

在线性二次型最优控制器中, 一般采用近似的线性化方法。在轨迹跟踪过程中存在参考系统, 假设系统已经在期望的轨迹上完全通过, 可以得到轨迹上每一时刻的状态量和控制律^[4]。根据当前系统与参考系统的偏差, 包括状态偏差和控制偏差来设计线性二次型最优控制器。

为了方便求解跟踪误差模型, 设参考机器人的运动学方程和公式(6)相同形式为:

$$\dot{\mathbf{X}}_r = \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \cos \theta_r \\ v_r \sin \theta_r \\ \omega_r \end{bmatrix} = f(\mathbf{X}_r, \mathbf{u}_r) \quad (7)$$

其中, \mathbf{X}_r 为参考机器人的位姿; v_r 为参考机器人的线速度; ω_r 为参考机器人角速度。对其在参考点进行线性化^[4], 公式(6)在任意点 $(\mathbf{X}_r, \mathbf{u}_r)$ 处进行泰勒展开, 只保留一阶项, 忽略高阶项, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= f(\mathbf{X}_r, \mathbf{u}_r) + \\ &\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_r \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_r}} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_r) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_r \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_r}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_r) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{其中, } \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_r \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_r}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_r \sin \theta_r \\ 0 & 0 & v_r \cos \theta_r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_r \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_r}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r & 0 \\ \sin \theta_r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

由公式(7)和(8)可得 t 时刻的位姿误差线性时变系统为:

$$\begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{X}}(t) = A(t) \Delta \mathbf{X}(t) + B(t) \Delta \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{Y}(t) = C \Delta \mathbf{X}(t) \end{cases} \quad (9)$$

其中, $\Delta \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_r(t) \in \mathbf{R}^3$ 为状态向量; $\Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_r(t) = [\Delta v(t) \ \Delta \omega(t)]^T \in \mathbf{R}^2$ 为控制(输入)向量; $\mathbf{Y}(t) \in \mathbf{R}^3$ 为输出向量; $A(t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_r \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_r}} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$

为系统矩阵; $B(t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_r \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_r}} \in \mathbf{R}^{3 \times 2}$ 为控制矩阵;

$C = I \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 为输出矩阵。

2.2 系统分析

能控性秩判据: 假设矩阵 $A(t)$ 和 $B(t)$ 都是 $n-1$ 次连续可微的, 在时间区间 $[t_0, t_1]$ 上, 若有

$$\text{rank} [M_0(t) \ M_1(t) \ \cdots \ M_{n-1}(t)] = n \quad (10)$$

则系统是状态完全能控的, 其中分块矩阵

$$M_0(t) = B(t) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} M_{k+1}(t) &= -A(t)M_k(t) + \frac{d}{dt}M_k(t) \\ k &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (12)$$

根据线性时变系统能控性秩判据有能控性矩阵

$$Q_C = [M_0(t) \ M_1(t) \ M_2(t)]^T \quad (13)$$

其中

$$\begin{cases} M_0(t) = B(t) \\ M_1(t) = -A(t)M_0(t) + \frac{d}{dt}M_0(t) \\ M_2(t) = -A(t)M_1(t) + \frac{d}{dt}M_1(t) \end{cases}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} M_0(t) & M_1(t) & M_2(t) \end{bmatrix}$$

$$= \text{rank} \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) & 0 & 0 \\ \sin \theta_r(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -w_r(t) \sin \theta_r(t) & v_r(t) \sin \theta_r(t) & 0 \\ w_r(t) \cos \theta_r(t) & -v_r(t) \cos \theta_r(t) & 0 \\ -\alpha_r(t) \sin \theta_r(t) - w_r^2(t) \cos \theta_r(t) & \alpha_r(t) \cos \theta_r(t) - w_r^2(t) \sin \theta_r(t) & 0 \\ a(t) \sin \theta_r(t) + v_r(t) w_r(t) \cos \theta_r(t) & -a(t) \cos \theta_r(t) + v_r(t) w_r(t) \sin \theta_r(t) & 0 \end{bmatrix}$$

将相关参数代入公式(13)可得系统完全能控条件, 即参考角速度 $w_r(t)$ 、参考线速度 $v_r(t)$ 、参考角加速度 $\alpha_r(t) = dw_r(t)/dt$ 、参考线加速度 $a_r(t) = dv_r(t)/dt$ 不同时为 0 时, $\text{rank} Q_C = 3$, 能控性矩阵为满秩的, 则有系统完全能控。

能观性秩判据: 假设矩阵 $A(t)$ 和 $C(t)$ 都是 $n-1$ 次连续可微的, 在时间区间 $[t_0, t_1]$ 上, 若有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ \vdots \\ N_{n-1}(t) \end{bmatrix} = n \quad (14)$$

则系统是状态完全能观的, 其中分块矩阵

$$N_0(t) = C(t) \quad (15)$$

$$N_{k+1}(t) = N_k(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_k(t) \quad (16)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1$$

根据线性时变系统能观性秩判据有能观性矩阵

$$Q_O = [N_0(t) \ N_1(t) \ N_2(t)]^T \quad (17)$$

其中

$$\begin{cases} N_0(t) = C \\ N_1(t) = N_0(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_0(t) \\ N_2(t) = N_1(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_1(t) \end{cases}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \end{bmatrix} = 3$$

将相关参数代入公式(17), 因为 C 为单位矩阵, 由 $\text{rank} C = 3$, 可得式(17)的秩 $\text{rank} Q_O = 3$, 能观性矩阵为满秩, 因此, 该系统完全能观。

3 控制器设计

针对 (2,0) 型轮式移动机器人, 结合线性二次型最优控制系统的基本理论对其进行问题描述。被控系统的系统方程和输出方程为式(9)所示的 (2,0) 型轮式移动机器人建立轨迹跟踪的线性时变系统。首先设计了线性二次型最优控制器并用李雅普诺夫函数证明了其稳定性。然后考虑了输入控制饱和约束条件, 设计了分段控制器, 并用李雅普诺夫函数证明了其稳定性。

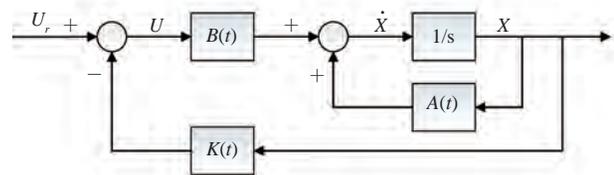


图 2 分段线性二次型控制器框图

Fig. 2 Piecewise linear quadratic regulator structure

3.1 线性二次型最优控制

为了消除移动机器人当前位姿与参考轨迹位姿的误差, 在饱和约束条件下, 采用参考轨迹前馈和位姿误差作为反馈的线性二次型(LQR)最优控制器。目标函数不仅需要能够保证轮式移动机器人能快速平稳地跟踪参考轨迹, 还需要对系统状态量的偏差、控制量及加速度量进行优化。给定初始状态 $\tilde{X}(0)=\tilde{X}_0$, 终端时间 T 。采用如下目标函数:

$$J = \frac{1}{2} \Delta X^T(T) S \Delta X(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \left\{ \Delta X^T(t) Q \Delta X(t) + \Delta u^T(t) R \Delta u(t) + \lambda^T [A(t) \Delta X(t) + B(t) \Delta u(t) - \Delta \dot{X}(t)] \right\} dt \quad (18)$$

其中, S 为正半定矩阵; Q 为非负定矩阵; R 为正定矩阵; $\Delta X^T(t) Q \Delta X(t)$ 反映了系统对参考轨迹的跟踪能力; $\Delta u^T(t) R \Delta u(t)$ 反映了对控制律增量的约束。求解最优控制律 $u^*(t)$, 使线性二次性能函数达到极小, 并由此设计线性二次型调节器 $LQR[\tilde{u}^*(k)]$ 。

则最优控制律为:

$$u^*[\Delta X(t), t] = u_r - R^{-1} B^T(t) P(t) \Delta X(t) \quad (19)$$

其中 $P(t)$ 为正定矩阵, 通过如下 Riccati 方程求解。

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - \\ P(t)B(t)R^{-1}B^T(t)P(t) + Q = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

下面将证明选取的控制律(19), 使得整个系统稳定。选取 Lyapunov 函数:

$$V = \Delta X^T(t) P(t) \Delta X(t) \quad (21)$$

根据公式(9)、(19)、(20), 带入式(21)可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \Delta \dot{X}^T(t) P(t) \Delta X(t) + \Delta X^T(t) \dot{P}(t) \Delta X(t) + \\ &\Delta X^T(t) P(t) \Delta \dot{X}(t) \\ &= \Delta X^T(t) \left\{ [A(t) - B(t)R^{-1}B^T(t)P(t)]^T P(t) - \right. \\ &\quad \left. [P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}B^T(t)P(t) + Q] + \right. \\ &\quad \left. P(t)[A(t) - B(t)R^{-1}B^T(t)P(t)] \right\} \Delta X(t) \\ &= -\Delta X^T(t) \{ P^T(t)B(t)(R^{-1})^T B^T(t)P(t) + Q \} \Delta X(t) \end{aligned} \quad (22)$$

因 R 为正定矩阵, 故 $P^T(t)B(t)(R^{-1})^T B^T(t)P(t)$ 为正定矩阵。又 Q 为正半定矩阵, 所以 $[P^T(t)B(t)(R^{-1})^T B^T(t)P(t) + Q]$ 为正定矩阵。因此 $\dot{V} < 0$, 所以控制系统是稳定的。

3.2 带饱和约束的分段二次型控制器

在轮式移动机器人实际控制过程中, 由于驱动器的输出限制, 考虑如下的输入控制饱和约束:

$$\begin{aligned} s.t. \quad g_1(t) &= \text{abs}(\Delta v) - \Delta v_{\max} \leq 0 \\ g_2(t) &= \text{abs}(\Delta w) - \Delta w_{\max} \leq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

其中, Δv 为线速度增量; Δw 为角速度增量; $\Delta v_{\max} > 0$ 为线速度增量的最大限制; $\Delta w_{\max} > 0$ 为角速度增量的最大限制。

当采用式(19)的控制律满足式(23)的饱和约束时, 轮式移动机器人以式(19)的控制律进行运动控制。当式(19)的控制律不满足式(23)的饱和约束时, 轮式移动机器人以固定的控制律进行运动控制。因此, 取分段的反馈控制律(PLQR):

$$\Delta u(t) = \begin{bmatrix} \Delta u_1(t) \\ \Delta u_2(t) \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中:

$$\begin{cases} \Delta u_1(t) = - \left\langle \text{sign} \left\{ \left[B^T(t) P_1(t) \Delta X \right]_1 \right\} \right\rangle \times \\ \quad \min \left\langle \text{abs} \left\{ \left[B^T(t) P_1(t) \Delta X \right]_1 \right\}, \Delta v_{\max} \right\rangle \\ \Delta u_2(t) = - \left\langle \text{sign} \left\{ \left[B^T(t) P_1(t) \Delta X \right]_2 \right\} \right\rangle \times \\ \quad \min \left\langle \text{abs} \left\{ \left[B^T(t) P_1(t) \Delta X \right]_2 \right\}, \Delta w_{\max} \right\rangle \end{cases} \quad (25)$$

其中 $P_1(t)$ 为正半定矩阵, 通过如下 Riccati 方程得到:

$$\begin{aligned} -\dot{P}_1(t) &= P_1(t)A(t) + A^T(t)P_1(t) - \\ &\quad P_1(t)B(t)R^{-1}B^T(t)P_1(t) + Q \end{aligned} \quad (26)$$

稳定性证明

$$\Delta u_{i \max} = \begin{cases} \Delta v_{\max} & i=1 \\ \Delta w_{\max} & i=2 \end{cases} \quad (27)$$

因此可以将式(25)所示的控制律可以化为

$$\Delta u_i(t) = \begin{cases} [\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\Delta\mathbf{X}]_i & \text{abs}[\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\Delta\mathbf{X}]_i \leq \Delta u_{i\max} \\ \frac{\Delta u_{i\max} [\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\Delta\mathbf{X}]_i}{\text{abs}\{[\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\Delta\mathbf{X}]_i\}} & \text{abs}\{[\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\Delta\mathbf{X}]_i\} > \Delta u_{i\max} \end{cases} \quad (28)$$

令

$$\gamma_i = \begin{cases} 1 & \text{abs}\{[\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\Delta\mathbf{X}]_i\} \leq \Delta u_{i\max} \\ \frac{\Delta u_{i\max}}{\text{abs}\{[\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\Delta\mathbf{X}]_i\}} & \text{abs}\{[\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\Delta\mathbf{X}]_i\} > \Delta u_{i\max} \end{cases} \quad (29)$$

通过式(29)定义系数矩阵 \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

由式(29)可知 $\gamma_i > 0$, \mathbf{Y} 为正定矩阵, 因此,

式(25)所示的控制律可以表达为

$$\Delta u_i(t) = \gamma_i [\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\Delta\mathbf{X}]_i \quad (31)$$

将式(29)代入式(24), 可将式(24)的控制律增量表示为

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{u}(t) &= - \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\Delta\mathbf{X} \\ &= -\mathbf{Y}\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\Delta\mathbf{X} \end{aligned} \quad (32)$$

证明如式(9)所示的轨迹跟踪误差模型在式(32)所示的反馈控制律作用下, 跟踪状态误差 $\Delta\mathbf{X}$ 能够收敛。下面将证明选取的控制律(32), 使得整个系统稳定。首先选取 Lyapunov 函数:

$$V = \Delta\mathbf{X}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\Delta\mathbf{X}(t) \quad (33)$$

根据式(9)、(26)、(32), 带入式(33)

可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \Delta\dot{\mathbf{X}}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\Delta\mathbf{X}(t) + \Delta\mathbf{X}^T(t)\dot{\mathbf{P}}_1(t)\Delta\mathbf{X}(t) + \\ &\quad \Delta\mathbf{X}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\Delta\dot{\mathbf{X}}(t) \\ &= -\Delta\mathbf{X}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\Delta\mathbf{X}(t) - \\ &\quad \Delta\mathbf{X}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{Y}\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t)\Delta\mathbf{X}(t) - \\ &\quad \Delta\mathbf{X}^T(t)\mathbf{Q}\Delta\mathbf{X}(t) \\ &= -\Delta\mathbf{X}^T(t)[\mathbf{P}_1(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t) + \\ &\quad \mathbf{P}_1(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{Y}\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t) + \mathbf{Q}]\Delta\mathbf{X}(t) \end{aligned} \quad (34)$$

其中, \dot{V} 是 V 对时间 t 的全导数。因 \mathbf{Y} 为正定矩阵, 故 $\mathbf{P}_1(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t)$ 和 $\mathbf{P}_1(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{Y}\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t)$ 均为正定矩阵。又 \mathbf{Q} 为正半定矩阵, 所以 $[\mathbf{P}_1(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t) + \mathbf{P}_1(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{Y}\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}_1(t) + \mathbf{Q}]$

为正定矩阵。因此 $\dot{V} < 0$, 所以控制系统是稳定的。

4 数值仿真

为了验证二次型控制器的有效性, 本章在 MATLAB 软件下进行数值仿真实验。首先对比了 LQR 与 PLQR 在跟踪直线和圆的参考轨迹的控制性能。然后仿真了 PLQR 在跟踪不同初始位姿下直线和圆的参考轨迹的性能。

4.1 仿真设置

4.1.1 饱和约束及加权矩阵设置

本实验设置控制律最小限制 $\mathbf{u}_{\min} = [-1 \ -1]^T$, 控制律最大限制 $\mathbf{u}_{\max} = [1 \ 1]^T$, 控制律增量最小限制 $\tilde{\mathbf{u}}_{\min} = [-0.2 \ -0.2]^T$, 控制律增量最大限制 $\tilde{\mathbf{u}}_{\max} = [0.2 \ 0.2]^T$, 加权矩阵为:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

4.1.2 参考轨迹设置

(1) 直线参考轨迹

参考轨迹为一条直线时, 其具体参数如下:

$$\mathbf{u}_r = [v_r = 0.1 \text{ m/s} \ \omega_r = 0]^T, \quad \mathbf{X}_r = [x_r \ y_r \ \theta_r]^T$$

其中, $x_r = v_r t \cos[\theta_r(t)]; y_r = v_r t \sin[\theta_r(t)];$

$\theta_r = \pi/3; 0 \leq t \leq 80$ 。

(2) 圆参考轨迹

参考轨迹为圆轨迹时, 圆心为(0, 0), 半径为 $r = 4 \text{ m}$, 具体参数如下:

$$\mathbf{u}_r = [v_r = 0 \ \omega_r = 0.4 \text{ rad/s}]^T, \quad \mathbf{X}_r = [x_r \ y_r \ \theta_r]^T$$

其中, $\theta_r = \omega_r t; x_r = r \cos(\omega_r t); y_r = r \sin(\omega_r t);$

$0 \leq t \leq 62.8$ 。

4.1.3 仿真设置

(1) LQR 与 PLQR 对比数值仿真

在移动机器人初始位姿为 $\mathbf{X}(0) = [1.5 \ -1.5 \ 0]^T$ 的情况下, LQR 与 PLQR 在跟踪上述直线参考轨迹; 在移动机器人初始位姿为 $\mathbf{X}(0) = [3.2 \ -0.3 \ 2\pi/3]^T$ 的情况下, LQR 与 PLQR 在跟

踪上述圆参考轨迹。

(2) PLQR 跟踪不同初始位姿数值仿真

设置不同初始位姿 $X_i(0)$ ($i=0\sim 9$), 如表 1 所示, 分别跟踪上述直线和圆参考轨迹。其中在 $X_i(0)$ ($i=0\sim 4$) 的初始位姿下, 跟踪直线参考轨迹; 在 $X_i(0)$ ($i=5\sim 9$) 的初始位姿下, 跟踪圆参考轨迹。仿真步骤及数据处理如表 2 所示。

表 1 初始位姿

Table 1 Initial position

实验编号 i	初始位姿 $X_i(0)$
0	$[1.5 \ -1.5 \ 0]^T$
1	$[-1.5 \ -1.5 \ 0]^T$
2	$[1.5 \ 1.5 \ 0]^T$
3	$[-1.5 \ 1.5 \ 0]^T$
4	$[1.5 \ -1.5 \ \pi]^T$
5	$[3.2 \ -0.3 \ 2\pi/3]^T$
6	$[4.2 \ -0.3 \ 2\pi/3]^T$
7	$[3.2 \ -0.3 \ \pi/3]^T$
8	$[3.2 \ -0.3 \ -\pi/3]^T$
9	$[5 \ 0.3 \ 0]^T$

4.2 仿真结果

LQR 与 PLQR 对比数值仿真结果如图 3 所示。其中, 图 3(a)~(f) 为跟踪直线的仿真, 图 3(g)~(l) 为跟踪圆的仿真。图 3(a)、(g) 为位置变化图, 图 3(b)、(h) 为线速度变化图, 图 3(c)、(i) 为角速度变化图, 图 3(d)、(j) 为线速度增量变化图, 图 3(e)、(k) 为角速度增量变化图, 图 3(f)、(l) 为跟踪误差图。LQR 和 PLQR 控制器跟踪直线和圆参考轨迹中, 均能使位姿误

差趋向于零。但在跟踪过程中, 当初始位姿较大时, LQR 控制律很大, 存在很大的跳变, 超过控制律限制, 控制律和控制律增量不满足饱和约束条件。PLQR 控制律能很好地满足饱和约束条件。

在不同初始位姿下, PLQR 跟踪上述参考轨迹仿真, 仿真效果如图 4 所示。其中, 图 4(a)~(e) 为跟踪直线的仿真, 图 4(f)~(j) 为跟踪圆的仿真。图 4(a)、(f) 为位置变化图, 图 4(b)、(g) 为线速度变化图, 图 4(c)、(h) 为角速度变化图, 图 4(d)、(i) 为线速度增量变化图, 图 4(e)、(j) 为角速度增量变化图。图中所有的红色实线为 LQR 的跟踪效果, 绿色实线为 PLQR 的跟踪效果, 黑色虚线为参考轨迹, 蓝色虚线为饱和约束。在不用初始位姿的情况下, 跟踪参考轨迹, PLQR 均能使位姿误差趋向于零, 且满足饱和约束条件。

4.3 结果分析

如图 3(a)~(f) 所示, 在跟踪直线参考轨迹仿真实验中, 在 LQR 控制律作用下, 最大线速度为 0.52 m/s, 线速度未超出最大线速度限制 1 m/s; 最大角速度为 2.89 rad/s, 角速度超出最大限制 1 rad/s, 不满足角速度约束的时间为 0.9 s; 最大线速度增量为 0.32 m/s², 超出最大线速度增量 0.2 m/s², 不满足线速度增量约束的时间为 2.9 s; 最大角速度增量为 2.89 rad/s², 超出最大角速度增量 0.2 rad/s², 不满足角速度增量约束的时间为 5 s。图 3(g)~(l) 所示, 在跟踪圆参考轨

表 2 仿真步骤及数据处理

Table 2 The simulation steps and data processing

步骤	数据处理
(1)	根据 4.1 进行相关仿真设置, 给出采样时间 t_s , 目标跟踪时间 T , 目标点数 $n=T/t_s$, 则 $t=t_s \times i$
(2)	根据参考轨迹及采样时间和目标跟踪时间, 离散成目标跟踪点集 $[x_r, y_r, \theta_r]$, $i=1, \dots, n$
(3)	根据当前位姿 $[x, y, \theta]$, 计算式 (8), 获得状态矩阵 A 和控制矩阵 B
(4)	计算位姿误差 $[x_e, y_e, \theta_e]$, 求解式 (21) Riccati 方程, 解得 P , 依选择的控制律式 (20) 或式 (32), 求解最优控制律 u_i^*
(5)	判断 $i < n$, 如果是, 令 $i=i+1$, 更新实际位姿 $[x, y, \theta]$; 否则, 跟踪结束
(6)	画图

迹仿真实验中, 在 LQR 控制律作用下, 最大线速度为 0.69 m/s , 线速度未超出最大线速度限制 1 m/s ; 最大角速度为 -1.32 rad/s , 角速度超出最大限制 1 rad/s , 不满足角速度约束的时间为 0.3 s ; 最大线速度增量为 0.29 m/s^2 , 超出最大线速度增量 0.2 m/s^2 , 不满足线速度增量约束的时间为 0.4 s ; 最大角速度增量为 -1.42 rad/s^2 , 超出最大角速度增量 0.2 rad/s^2 , 不满足角速度增量约束的时间为 1.3 s 。在特定的初始位姿, 采用 LQR 会导致控制律及控制律增量都会超过最大限制, 同时跳变现象严重, 而 PLQR 则可以避免这些问题。

如图 3、4 所示, 在 PLQR 的作用下, 在不同初始位姿跟踪直线和圆参考轨迹, 其控制律及控制律增量均能满足饱和约束条件。

综上, 从仿真结果可以看出, 传统 LQR 在控制律及控制律增量都会超过最大限制(图中蓝

色水平线), 控制律及控制律增量会出现跳变现象, 机器人实际运行中这部分控制律不可用。而在本文设计的轨迹跟踪控制器 PLQR 的作用下, 跟踪不同初始位姿, 不同的参考轨迹都有良好的跟踪效果, 能避免控制律跳变, 且跟踪误差均渐近趋于零, 并且控制律均能满足饱和约束。

由于本文设计的算法在参考系统进行泰勒展开, 只保留一阶项, 忽略高阶项, 因此在实际应用中要求状态误差和控制误差不能太大, 在控制精度要求非常高的场合存在难以适用的局限性。同时, 在实际应用中还有需要改进的地方, 例如, 需要根据经验调节权重矩阵等参数, 以及当位姿误差过大时, 收敛过于慢的问题。

5 实验

目前国内外研究^[2,3,5,11]大部分在仿真环境对

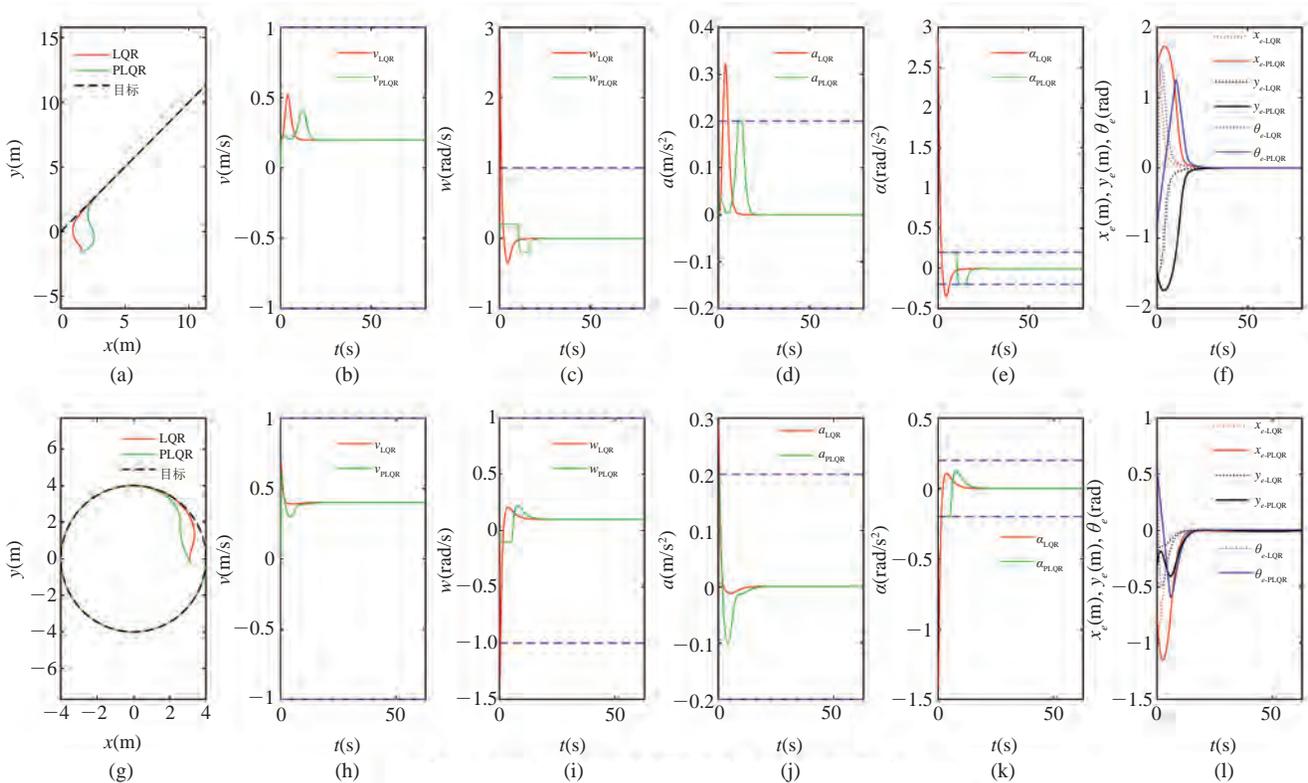


图 3 LQR 与 PLQR 跟踪直线和圆参考轨迹效果图

Fig. 3 LQR and PLQR performance

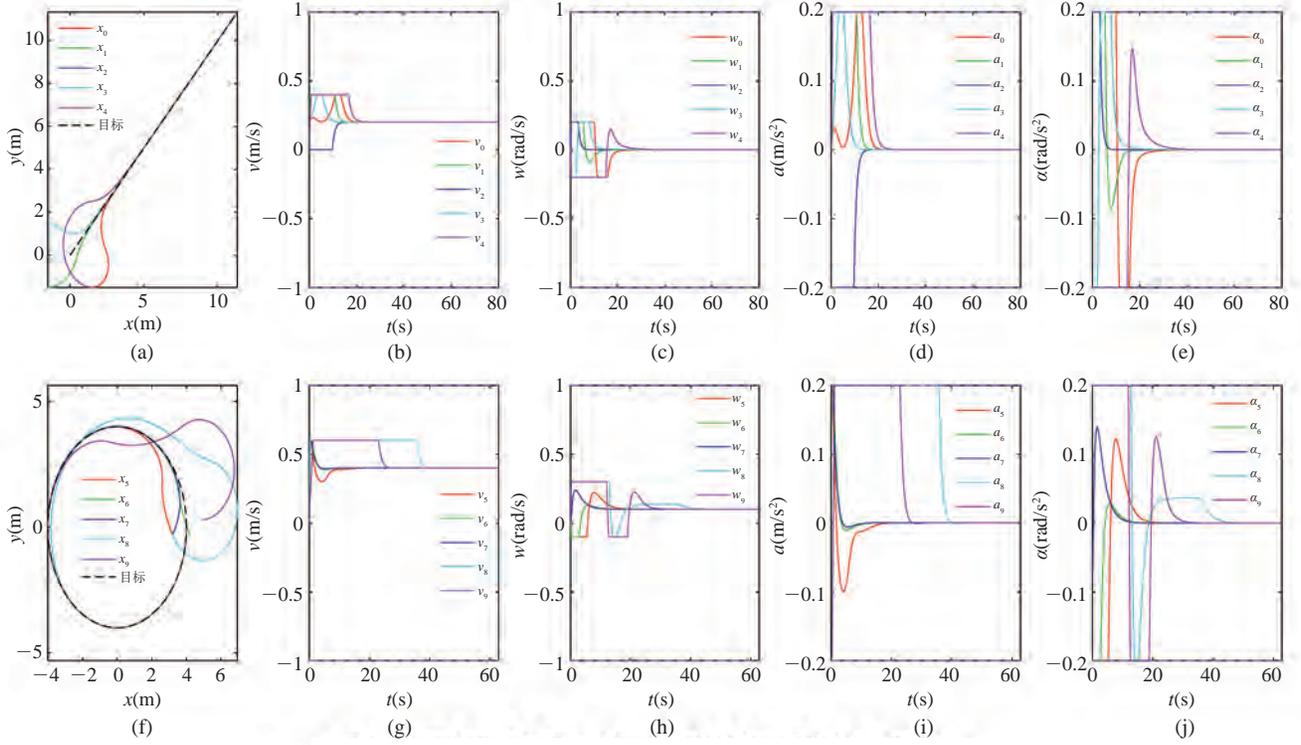


图4 PLQR 算法在不同初始位姿跟踪直线和圆参考轨迹效果

Fig. 4 Tracking of PLQR in different initial pose

所设计的轨迹跟踪控制器进行实验, 虽然也有少部分的研究^[4,22]在实物平台进行实验, 但其实验的目标轨迹为简单的直线或圆轨迹。而在实际应用中, 移动机器人的跟踪轨迹往往是由多段轨迹组成, 存在着很多转折点, 且在转折点处跟踪的目标角度存在跳变现象。此时, 转折点的跳变相当于给移动机器人一个较大的干扰, 更能体现控制器的跟踪性能。例如, 扫地机器人进行扫地功能或避障回充电桩时, 其轨迹由多段折线组成。因此, 跟踪多线段目标轨迹更具有应用价值, 本节以 INXNI X533 移动机器人平台为实验对象, 对本文所设计的 PLQR 控制算法跟踪多段折线的目标轨迹进行实验验证。

5.1 实验场景及设置

5.1.1 饱和约束及加权矩阵设置

本实验设置控制律最小限制 $\mathbf{u}_{\min} = [-0.5 \ -0.5]^T$, 控制律最大限制 $\mathbf{u}_{\max} = [0.5 \ 0.5]^T$; 控制律增量最小限制

制 $\tilde{\mathbf{u}}_{\min} = [-1 \ -1]^T$, 控制律增量最大限制 $\tilde{\mathbf{u}}_{\max} = [1 \ 1]^T$, 加权矩阵为:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

5.1.2 参考轨迹设置

已知相邻的两个转折点分别为 (x_i, y_i) 和 (x_{i+1}, y_{i+1}) , 其中 i 表示第 i 个转折点, 参考控制律 $(v_r, w_r) = (0.1, 0)$, 由第 i 和 $i+1$ 这两个转折点构成的线段为:

$$\begin{cases} \theta_{i+1} = \arctan[(y_{i+1} - y_i)/(x_{i+1} - x_i)] \\ x_i = x_i + v_r t \cos \theta_{i+1} \\ y_i = y_i + v_r t \sin \theta_{i+1} \end{cases} \quad (37)$$

5.1.3 实验场景

实验环境如图 5 所示, 实验任务是实验平台从 $A(0, 0)$ 出发, 沿直线到达 $B(10, 0)$, 再从 $B(10, 0)$ 出发, 沿直线到达 $C(10, 2.8)$, 从 $C(10, 2.8)$ 出发, 沿直线穿过工位到达 $D(0, 2.8)$, 最后

沿直线回到 $A(0, 0)$ 。实时的目标参考点位姿可通过式(36)计算获得, 实时实际位姿可从 SLAM 获得, 并在实验过程中, 进行快动作录像。

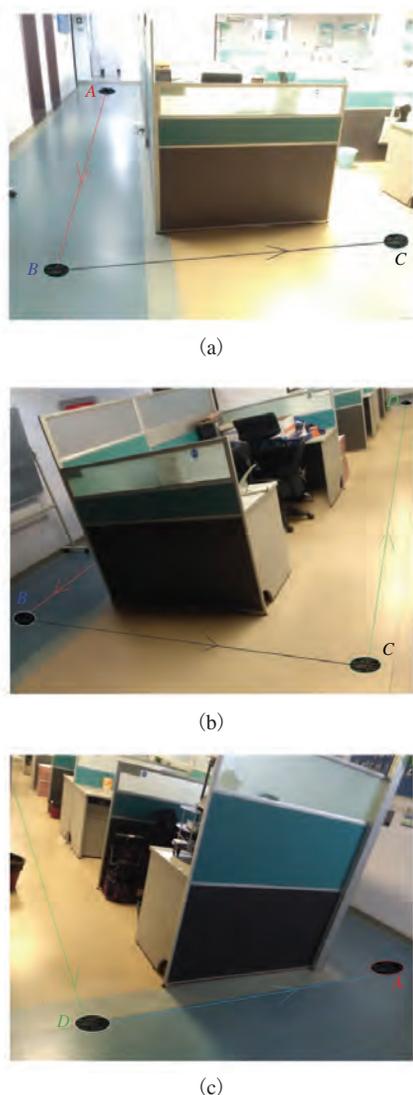


图 5 实验场景

Fig. 5 Experimental scene

5.1.4 实验步骤及数据处理

具体实验步骤如下:

- (1) 根据任务, 进行实验设置;
- (2) 从轨迹规划模块获取并记录当前参考位姿, 从 SLAM 模块获取并记录实时位姿;
- (3) 根据步骤(2), 轨迹跟踪控制模块输出并记录控制律;
- (4) 任务是否完成, 如果否, 返回步骤(3);

(5) 数据处理, 根据步骤(3)、(4)记录的数据, 进行处理。

将实验过程中记录的地图、参考轨迹、实时位姿及控制律数据导入 MATLAB 平台, 生成参考轨迹和跟踪轨迹图及控制律图。

5.2 实验结果

实验结束后, 我们在 MATLAB 平台读取并显示实验过程中 SLAM 生成的地图, 并将实验过程中的实时位姿组成的实际运动轨迹和目标参考点组成的参考轨迹显示在该地图中。参考 5.1.4 节的实验步骤及数据, 得到如图 6 的实验结果。图 6(a)为位置图, 其中点云表示 SLAM 生成的地图, 红色实线表示目标参考轨迹, 绿色实线表示移动机器人实际运动的轨迹; 图 6(b)为位姿误差图, 横轴表示移动机器人实时记录的第 i 个位姿, 纵轴为移动机器人位姿误差, 其中红色实线表示世界坐标系的 x 轴方向误差, 绿色实线表示世界坐标系的 y 轴方向误差, 蓝色实线表示世界坐标系的角速度方向误差; 图 6(c)速度控制律; 图 6(d)为角速度控制律。

图 7 为实验过程中采用手机“快动作”模式录取的视频截图, 不同子图分别为实验平台在跟踪过程中的状态。图 7(j)为实验平台跟踪最终状态, 图中所示的半圆为原点区域。在本次实验中, 实验平台经过较长的轨迹跟踪以较小误差达到原点区域。

5.3 实验分析

如图 7 所示的实验结果, 实验平台在所设计的控制器的作用下, 图 6(a)的绿色实际轨迹几乎和红色目标参考轨迹重合, 即能够很好地跟踪目标参考轨迹。在图 6(b)中, 角度误差出现 4 次波动是由于参考轨迹是由 4 个转折点组成的长方形, 当实验平台到达转折点时, 跟踪目标从一条直线跳变到另一条直线, 因此角度误差发生较大变化。此时进行角度镇定, 角度镇定之后, 再跟踪直线时, 位姿误差始终收敛到很小范围, 控制

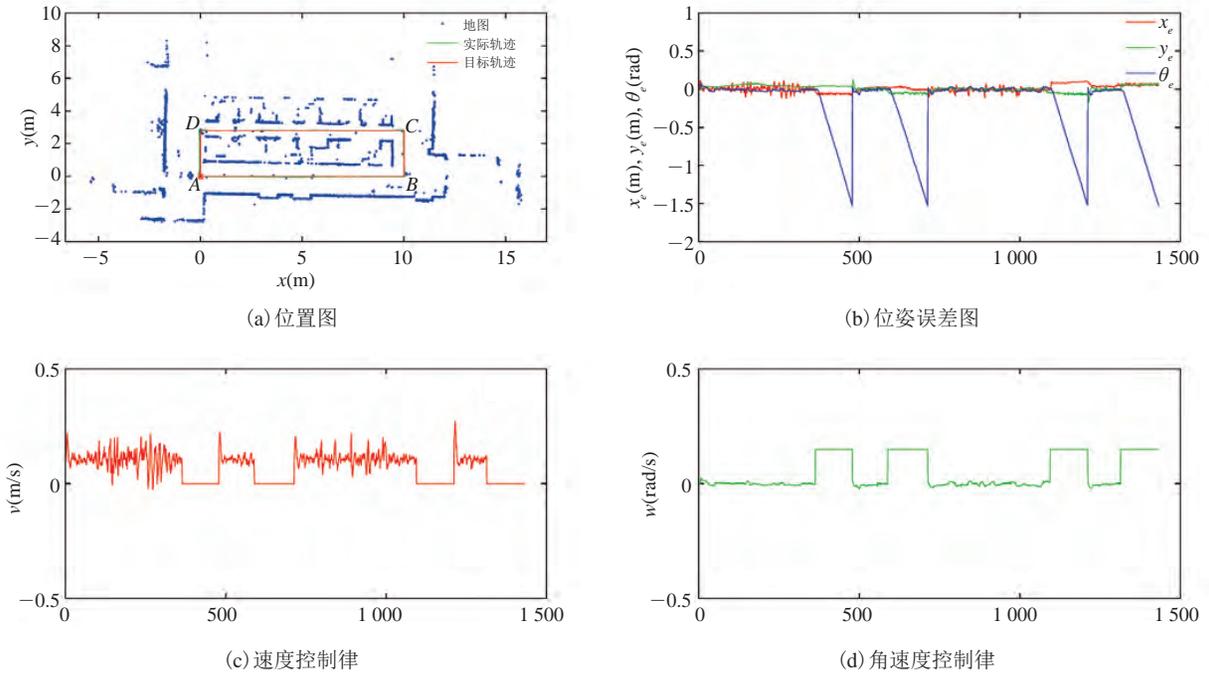


图 6 实验结果

Fig. 6 Experimental results

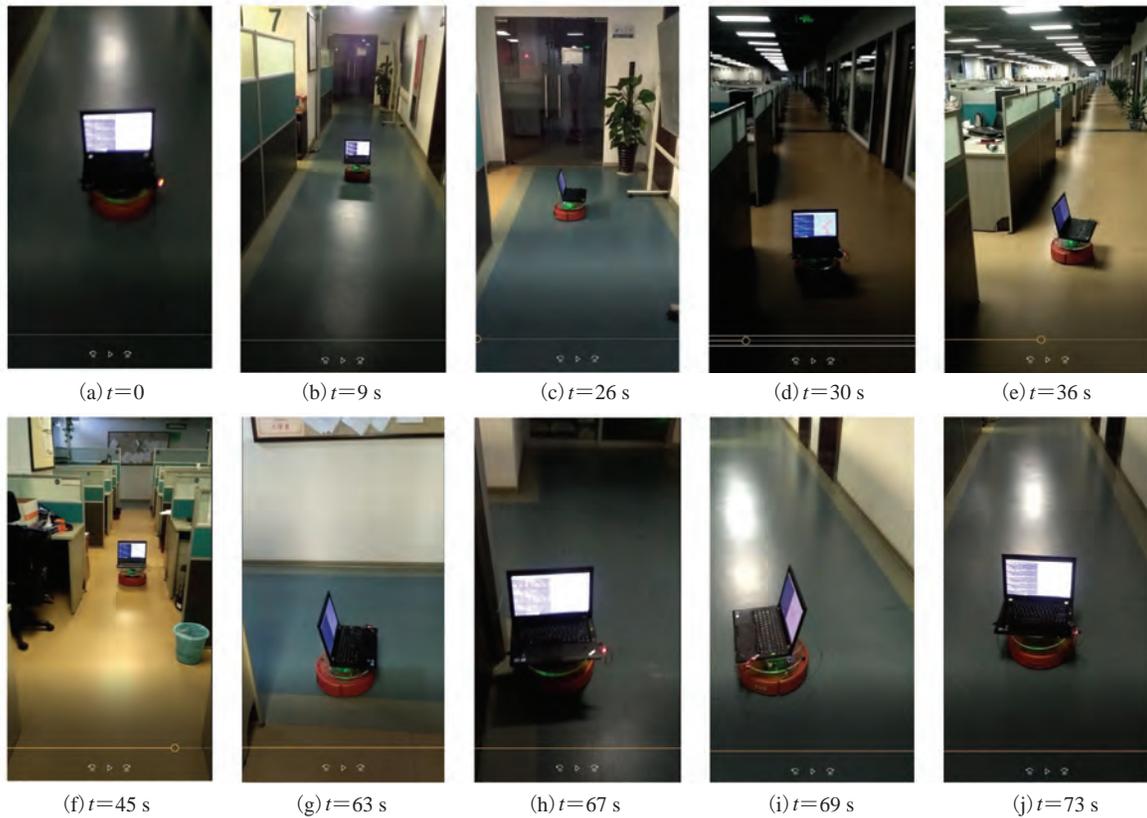


图 7 实验过程截图

Fig. 7 Screenshot of the experimental process

律稳定在饱和约束范围内。相比其他研究方法^[22]只在单一直线或圆弧上进行轨迹跟踪实验, 本文所设计的控制器能够较好地跟踪多条线段组成的轨迹, 并能够在后续的直线跟踪中消除转折点较大角度误差的影响。综合实验结果表明, 本文设计的控制器能够稳定地跟踪长距离目标轨迹, 同时解决了机器人实际应用中轨迹曲折难跟踪的问题。

6 总结与展望

本文研究了在饱和约束条件下非完整约束移动机器人的轨迹跟踪问题, 设计出能够渐近稳定的分段二次型控制律 PLQR。仿真和实验结果表明, 基于 PLQR 的轮式移动机器人能够避免控制律跳变的情况, 在满足饱和约束条件下对不同初始位姿及不同的参考轨迹都有较好的跟踪效果, 且具有较好的抗干扰能力。

参 考 文 献

- [1] Brockett RW. Asymptotic stability and feedback stabilization [J]. *Differential Geometric Control Theory*, 1983, 27 (1): 181-191.
- [2] Diemer S, Bonnabel S. An invariant linear quadratic gaussian controller for a simplified car [C] // 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2015: 448-453.
- [3] Yang C, Li Z, Li J. Trajectory planning and optimized adaptive control for a class of wheeled inverted pendulum vehicle models [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2013, 43(1): 24-36.
- [4] Kuhne F, Walter F, Manoel G, et al. Model predictive control of a mobile robot using linearization [C] // 2004 Proceedings of Mechatronics and Robotics, 2004: 525-530.
- [5] Su KH. Robust tracking control design and its application to balance a two-wheeled robot steering on a bumpy road [J]. *Journal of Systems and Control Engineering*, 2012, 226(7): 887-903.
- [6] Hou ZG, Zou AM, Cheng L, et al. Adaptive control of an electrically driven nonholonomic mobile robot via backstepping and fuzzy approach [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009, 17(4): 803-815.
- [7] Park BS, Yoo SJ, Park JB, et al. A simple adaptive control approach for trajectory tracking of electrically driven nonholonomic mobile robots [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, 18(5): 1199-1206.
- [8] Chen CY, Li THS, Yeh YC. EP-based kinematic control and adaptive fuzzy sliding-mode dynamic control for wheeled mobile robots [J]. *Information Sciences*, 2009, 179(1): 180-195.
- [9] Chwa D. Tracking control of differential-drive wheeled mobile robots using a backstepping-like feedback linearization [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 2010, 40(6): 1285-1295.
- [10] Cui R, Guo J, Mao Z. Adaptive backstepping control of wheeled inverted pendulums models [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 79(1): 501-511.
- [11] Peng Z, Wen G, Yang S, et al. Distributed consensus-based formation control for nonholonomic wheeled mobile robots using adaptive neural network [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 86(1): 605-622.
- [12] Tsai CC, Huang HC, Lin SC. Adaptive neural network control of a self-balancing two-wheeled scooter [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2010, 57(4): 1420-1428.
- [13] Xu JX, Guo ZQ, Lee TH. Design and implementation of integral sliding-mode control on an underactuated two wheeled mobile robot [J].

- IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2014, 61(7): 3671-3681.
- [14] Huang J, Wen C, Wang W, et al. Adaptive stabilization and tracking control of a nonholonomic mobile robot with input saturation and disturbance [J]. Systems & Control Letters, 2013, 62(3): 234-241.
- [15] Shojaei K. Saturated output feedback control of uncertain nonholonomic wheeled mobile robots [J]. Robotica, 2015, 33(1): 87-105.
- [16] 王耀南. 机器人智能控制工程 [M]. 北京: 科学出版社, 2004: 3-20.
- [17] 王耀南, 孙炜. 智能控制理论及应用 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2008: 20-45.
- [18] Lian C, Xu X, Chen H, et al. Near-optimal tracking control of mobile robots via receding-horizon dual heuristic programming [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2016, 46(11): 2484-2496.
- [19] Sunberg Z, Chakravorty S, Erwin RS. Information space receding horizon control [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2013, 43(6): 2255-2260.
- [20] Rawlings JB, Mayne DQ. Model Predictive Control: Theory and Design [M]. Madison: Nob Hill, 2009.
- [21] Grüne L, Pannek J. Nonlinear Model Predictive Control: Theory and Algorithms [M]. London: Springer, 2013.
- [22] 金娟. 自主移动机器人轨迹跟踪与避障控制研究 [D]. 长沙: 湖南大学, 2014.